Les fractions et les décimaux, une approche culturelle et historique

Bruno HAUTIN, GFEN 28

L'essence culturelle et historique de la démarche exposée nécessite une narration rapide de son histoire.
Il y a une dizaine d'années, alors que je débutais dans le métier, une évaluation des compétences quant à la maîtrise des fractions montrait que seulement un petit quart de mes élèves de CM2 étaient en réussite. Un collègue de l'école, PEMF, me préconisa de bien asseoir le concept de numération positionnelle, me faisant découvrir pour la première fois le rôle de l'histoire (ma formation universitaire) dans la construction de la numération et me donnait deux ouvrages qui allaient révolutionner ma pensée : le bulletin « Spécial Histoire » du GFEN 28 et le livre de Odette Bassis *Mathématiques : quand les enfants prennent le pouvoir* (F. Nathan). Le second, mon père, également PEMF, me conseillait le livre de la collection Ermel[1] (Hatier).

Après quelques années de digestion, de tests, d'échecs, de petites réussites, j'élaborais progressivement le squelette de cette démarche où alternent des temps de recherche puis d'analyse réflexive par les élèves et des apports magistraux sur l'histoire de la construction des notions par les Hommes, montrant que le savoir est le fruit d'une aventure humaine dans laquelle ils sont, par ce travail, engagés.

Commençons par analyser les réussites et échecs autour des fractions et des décimaux. Mon postulat de départ, appuyé par diverses recherches (voir article de Roland Charnay et livre d'Odette Bassis cité ci-dessus) et par mes nombreuses visites et formations dispensées autour de ce thème, est que les élèves comprennent mal les décimaux car ils les assimilent à des entiers ou comme un cas particulier des entiers, ce qui les conduit à des erreurs que les collègues de cycle 3 connaissent bien.
J. Bolon a proposé la tâche suivante à des élèves depuis la fin du CM1 jusqu'à la 5e : par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 ?
Le tableau suivant donne les pourcentages de réussite :

Classe	CM1	CM2	6e	5e
Réussite	22%	30%	27%	29%

Ces résultats confirment le fait, lorsqu'on analyse les procédures des élèves ayant échoué, qu'ils ont probablement utilisé à tort leurs compétences sur les entiers pour résoudre cet exercice et qu'il y a bien une conceptualisation erronée des décimaux : pour aller de 6,9 à 7, il faut ajouter 1 et pour aller de 7 à 7,08, il faut ajouter 8. 8 étant plus grand que 1, l'écart est donc important entre 7 et 7,08. Cette analyse nous apprend également que si les élèves ne conceptualisent pas correctement les décimaux au CM1, ils ne les comprendront vraisemblablement pas dans les classes supérieures.

Je reste convaincu après quelques années d'enseignement m'ayant donné le privilège de suivre sur deux années des classes de CM1 puis CM2 que c'est bien au CM1 que se jouent les réussites futures de nos élèves car c'est dans l'approche des fractions que se construit la conceptualisation des décimaux.

Le mot est lâché : fraction, fractionnement de l'unité mais quel rapport avec les décimaux ? Pour cela remontons quelques millénaires en arrière et faisons vivre à nos élèves des situations qu'ont vécues et résolues nos ancêtres. La démarche générale est évidemment plus longue

1 Collection élaborée par une équipe de didactique des mathématiques de l'I.N.R.P. dont les travaux portent sur les apprentissages numériques et la résolution de problèmes, équipe à laquelle Roland Charnay a participé activement.

et chaque compétence abordée jouit d'une situation-problème spécifique mais, pour les besoins d'écriture, je ne présenterai que les trois grandes séances de rupture.

Mise en situation en homologie avec les problèmes à résoudre que se sont posés les hommes

Comment rendre compte d'une longueur et communiquer sa mesure ?[2]

Chacun dispose

- d'un segment dessiné sur une bande de papier ([AB] 25 cm ou [CD] 17,5 cm),
- d'une feuille sur laquelle figurent 6 segments de longueurs différentes : [1] 12,5 cm, [2] 25 cm, [3] 16 cm, [4] 22,5 cm, [5] 17,5 cm, [6] 21 cm,
- d'une fiche à remplir pour l'envoyer à quelqu'un qui a un segment différent. Consigne : « Écrire un message pour que le récepteur puisse retrouver sur sa fiche le segment qui est le vôtre. Le double décimètre est interdit mais tout ce qui n'est pas interdit est autorisé ».

Les émetteurs doivent donc mesurer leur segment et écrire leur message à leur binôme (qui a un segment de longueur différente). Après vérification le destinataire propose une solution à l'émetteur. Si la solution n'est pas la bonne l'émetteur doit refaire son message.

Phase de confrontations pour construire la notion d'étalon puis d'étalon commun

Les échanges portent sur les procédures employées pour mesurer : gomme, stylo, doigt, ongle, bout de papier, etc. : soit, lors de la comparaison indirecte de deux grandeurs, la nécessité de créer une médiation par une grandeur intermédiaire plus petite que celles à comparer et qui sera prise comme étalon.
Qu'est-ce qui pose problème ? Nous n'avons pas tous la même gomme, le même stylo, etc.
Un premier bilan porte alors sur la nécessité d'utiliser une unité de mesure commune, un étalon commun fiable pour éviter les imprécisions.

Premier apport historique sur la notion d'étalon

Une unité de mesure est définie par un étalon, les étalons doivent avoir :
• une précision maximale (caractéristique déterminante car l'étalon peut évoluer avec les avancées technologiques) ;
• un caractère naturel et invariant dans le temps et dans l'espace ;
• un caractère reproductible.

2 Cf. chapitre « Mesurer » du livre *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques*, Tome 2, Odette Bassis, éd. Hachette éducation, 2004.

> À la fin du XVIIIème siècle les grands réformateurs des poids et des mesures, dont Condorcet, Lagrange, Lavoisier, sont les créateurs du système simple d'unités appelé système métrique ou décimal, le nombre d'unités est réduit et il existe des subdivisions en rapport simple (fraction de 10) pour chaque unité.
> La réforme est mise en pratique par Condorcet qui annonce à la jeune Assemblée Nationale en 1790 la volonté de mise en place rapide d'un système d'unité clair et simple pour uniformiser les poids et les mesures. Cependant le choix des étalons est difficile et en particulier celui du mètre, unité à la base des autres. En 1791, la volonté d'universalité chère aux révolutionnaires fait dire aux dirigeants qu' « il ne faut rien de particulier à la situation d'un peuple sur le globe », on décidera alors qu'un mètre représentera la dix millionième partie du méridien terrestre allant du pôle boréal à l'équateur. Le système métrique décimal sera institué en France le 7 avril 1795 mais il faudra attendre la loi du 4 juillet 1851 du ministère Guizot pour son adoption exclusive.

De la mesure approchée à la mesure exacte

Notions d'encadrement et de sous-multiples

Une bandelette étalon commune à tous (8 ou 9 ou 10 cm) est distribuée à chacun et imposée, comme l'a fait l'Académie des sciences à la fin du XVIIIème siècle. Avec cet étalon, on doit mesurer les longueurs des segments [1], [2], [3], [4], [5] et [6] qui figurent sur la feuille (voir plus haut) et écrire la longueur de chacun. La mise en commun est le moment où chacun raconte comment il a procédé ainsi que ses propositions d'écriture. Toutes les propositions sont « montrées » avec utilisation d'un matériel collectif. La mesure par report de chaque segment à l'aide de l'unité ne pose pas de problèmes particuliers mais c'est la partie restante, plus petite que l'étalon, qui nourrit le débat.
On peut l'encadrer entre deux unités mais comment la mesurer précisément avec cet étalon ?
Une nouvelle nécessité apparaît donc : fractionner l'unité commune en la pliant en 2 puis en 4, voire en 8…

Nouvel apport historique

> Dès que les Hommes ont eu l'usage du nombre entier, ils ont inventé, pour les besoins du commerce, de la construction ou pour des pratiques sociales de partages de biens, de calcul des impôts, des fractionnements de l'unité. C'est probablement pour cela que l'on trouve les premières fractions dans le croissant fertile, lieu de transition des périodes Paléolithique et Néolithique mais également espace d'invention de l'écriture.
> **En Mésopotamie**, vers 3000 avant J.C., dans la région de Sumer, apparaissent les premières représentations de fractions pour des cas particuliers : 1/120 ; 1/60 ; 1/30 ; 1/10 ; 1/5.
> Au début du IIème millénaire avant J.C., les **Babyloniens**

utilisent une écriture, dite ***cunéiforme***, qui permet de représenter des grands nombres mais également des cas particuliers de fractions. Le système de numération est sexagésimal (base 60) et combine le ***principe additif*** et le ***principe de position***.
Dans cette écriture, les fractions se représentent avec des dénominateurs de 60 ou 3600 (60^2).
Les nombreux diviseurs de 60 permettent de représenter facilement les fractions 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/12, 1/15, 1/20 ou 1/30.

En Egypte, au IIIème millénaire avant J.C., les scribes écrivent les nombres sur des papyrus sous forme de hiéroglyphes. Les égyptiens utilisent un système de numération (reposant sur le principe additif). Ils représentent les fractions de type 1/n (***fractions unitaires***) en plaçant le symbole de bouche au dessus du dénominateur.

Au Moyen-Orient, la ***notation fractionnaire avec la barre*** est un héritage des arabes. Le perse Abu'l-Wafa (940 ; 998) est un des premiers à accorder le statut de nombre à tout rapport de grandeurs.
En 1427, Jemshid al Kashi (1380 ; 1430), astronome de Samarkand, donne une définition des fractions décimales, expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de ***fractions décimales***.
Al Kashi détaille également les techniques opératoires en expliquant qu'en utilisant les fractions décimales, les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur les entiers. Il conçoit également des tableaux de conversion de fractions décimales en fractions sexagésimales antérieurement utilisées par les babyloniens.

En Occident, dès le XIIème siècle, le traducteur anglais Adelard de Bath (1075 ; 1160) utilise dans sa traduction du perse Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850) le mot *fractiones* (« *kasr* » en arabe pour signifier rompu ou fracturé). Au Moyen Age en Europe, les fractions sont en effet appelées ***nombres rompus***.

Cette terminologie de « nombre rompu » peut être intéressante à reprendre, réutiliser en classe car elle symbolise parfaitement le fractionnement de l'unité.
Une fois ce concept abordé, l'essentiel du travail portera sur le réinvestissement en mesurant ou traçant des segments, des aires à l'aide de bandes ou aires unité. Une fois que les élèves maîtriseront suffisamment on pourra supprimer la bande/aire unité pour les inciter à travailler avec les fractions, abstraire, trouver les équivalences. C'est avec (puis sans) des droites graduées qu'ils apprendront à décomposer, comparer, ranger, encadrer des fractions. Mais pour cela, je mettrais beaucoup plus de temps que les manuels semblent le préconiser, entre la première séance de fraction (janvier) et la première séance de fraction décimale, il se passera environ 5 mois à raison de deux séances par semaine.
Les Hommes ayant mis quelques millénaires, les élèves ont donc le droit à quelques mois !

Vers les fractions décimales...

Au XIVème siècle, le mathématicien français Nicole Oresme (1325 - 1382) emprunte la notation des fractions avec barre due aux arabes dans son ouvrage « Algorismus proportionum ». C'est dans ce même ouvrage, que sont définis pour la première fois les termes « **numérateur** » et « **dénominateur** ». En 1579, un autre français, François Viète (1540 ; 1603), incite à l'usage des fractions décimales devant les fractions sexagésimales.

C'est donc ce que je vais faire vivre aux élèves. Pour cela, une grande bande de papier (rouleau de machine à calculer d'une longueur de 3 m) ainsi qu'une bande unité (1 dm) représentant le 1/10ème de l'unité.

Consigne
« *Tracez un segment sur toute la longueur de la bande de papier. Avec votre bande unité (une bande vierge de 10 cm), placez le point A tel que [OA] = 1, le point B tel que [OB] = 25/10, le point C tel que [OC] = 13/10 et le point D tel que [OD] = 137/100* »
La mise en commun doit permettre de mettre en exergue que l'on ne peut pas placer exactement 137/100.
On peut juste l'encadrer : 135/100 (ou 1U + 3/10 + une moitié de 1/10 soit 5/100) < 137/100 < 14/10.
Nous décidons donc de fractionner/rompre/fracturer l'unité en dix parties égales et de nouveau la notion de sous-multiple réapparaît au même titre que le choix historique de fractionner en 10. Une bande avec une graduation est alors distribuée aux élèves, le point posant problème est alors facilement placé puisque la décomposition est bien maîtrisée.
Là encore, les compétences énoncées précédemment (mesurer, tracer, décomposer, encadrer, ranger) sont travaillées longuement (pendant deux moins environ) mais cette fois-ci uniquement avec des fractions décimales. Les procédures étant les mêmes, le travail se fait beaucoup plus rapidement.

... puis les nombres décimaux

Les programmes nous demandent d'ajouter des fractions de même dénominateur, je le fais mais c'est surtout sur les opérations (additions et soustractions principalement) de fractions décimales ayant des dénominateurs différents que je porterai l'essentiel de cette troisième séquence.
Pendant une ou deux semaines, en calcul, je vais proposer à mes élèves des opérations du type :
14/10 + 7/100 + 9/1000 + 18/100 + 7 + 45/10

Plusieurs procédures sont recueillies :
- réduire toutes les fractions au même dénominateur puis additionner les numérateurs (soit 14.779/1000

donc 14 unités et 779/1000)
- additionner les fractions qui ont le même dénominateur puis additionner le nombre d'unités et ensuite nécessité de mettre au même dénominateur

• Construire un tableau (de conversion) : on inscrit les nombres de droite à gauche (numération arabe)

1	1/10	1/100	1/1000
1	**4**	0	0
0	0	**7**	0
0	0	0	**9**
0	**1**	8	0
7	0	0	0
4	5	0	0
= 13	**1**	**5**	**9**

Apport historique sur les évolutions des modalités d'écriture des nombres décimaux

Jusqu'au début du 16ème siècle les nombres décimaux n'existent pas en Europe : il n'y a que des fractions. Avec les fractions décimales, le belge **Simon Stevin** (1548 ; 1620) donnera naissance aux nombres décimaux dont l'écriture en ligne sera plus commode pour les calculs dans son ouvrage la *Disme* en 1585 :
14(1) + 7(2) + 9 (3) + 18(2) + 7(0) + 45(1) =

	0	1	2	3
+	7			
+	1	4		
+	4	5		
+		1	8	
+			7	
+				9
	13	1	5	9

Soit 13**(0)** 1**(1)** 5**(2)** 9**(3)** qui deviendra 13.159 en 1592, un italien, **Giovanni Antonio Magini** proposant la notation avec le point qui restera dans les pays anglo-saxons.
Et enfin 13,159. C'est au début du XVIIème siècle que le néerlandais **Willebrord van Roijen Snell** (1580 ; 1626), aussi connu sous le nom de **Snellius**, puis l'écossais **John Napier** (1550 ; 1617) qui utiliseront la virgule dans l'écriture des nombres décimaux.

Oui, pendant quelques années, j'ai enseigné un concept que je ne maîtrisais que peu car je n'avais pas compris que fractions décimales et décimaux étaient une seule et même chose et que seule la codification changeait pour favoriser les calculs.
C'est pour cela qu'en terme de progression, il m'est arrivé de n'aborder les décimaux qu'en CM2 car il me fallait quasiment un an pour construire le concept de fraction. Ce n'est pas grave car une fois que les élèves maîtrisent parfaitement les compétences liées aux fractions décimales définies dans les programmes, aborder les décimaux devient très simple puisque les procédures restent les mêmes. Dans ce cas, quelques semaines suffisent !

Conclusion

« Une grande confusion vient du fait que les décimaux sont introduits comme des entiers écrits autrement avec seulement le problème du maniement technique, procédural lié à la présence de la virgule alors que les nombres décimaux sont des nombres conceptuellement autres que les nombres entiers.
Ce qui demeure fondamental pour l'introduction des décimaux c'est de les aborder conceptuellement dans des situations qui les différencient d'emblée des nombres entiers, c'est-à-dire de telle sorte que les entiers soient inopérants dans de telles situations. Et donc des situations qui nécessitent d'explorer autrement, d'imaginer d'autres voies, d'inventer d'autres conduites que ce qui a déjà été vécu. » O. Bassis.

Si l'on voulait essayer de résumer très brièvement l'étagement des situations problèmes proposées, on pourrait dire que :
a – mesurer c'est comparer 2 longueurs avec une troisième plus petite servant d'étalon
b – pour des raisons de commodité nécessité d'un étalon commun
c – lorsque 2 longueurs sont situées dans un même encadrement, nécessité de fractionner/rompre l'unité (au début par pliage) : notion de sous-multiples (de 1er ordre puis de deuxième, de troisième, etc.) > invention des fractions
d – introduction du système décimal > fractionnement par 10 > fractions décimales
e – évolution des codifications.

Ce qui me semble caractéristique de cette démarche, c'est qu'apprendre c'est explorer les différentes modalités de résolution d'un problème qui s'est posé à l'humanité (contexte problématique). Les apports d'éléments historiques inscrivent l'apprentissage comme aventure humaine et c'est pour cela que l'auto-socio-construction du savoir prend toute sa place afin d'aider les élèves à passer du faire au penser.

Mais n'oublions pas que dans cette société du zapping, du « je veux tout tout de suite », l'enseignant doit être un rampart face à cette dérive. Cette démarche n'a aucun sens si on ne laisse pas le temps aux élèves de construire, déconstruire, se tromper et se retromper.
Je le redis et je l'affirme, des élèves de 9 ou 10 ans doivent avoir le temps de construire ce que l'Humanité a mis des millénaires à élaborer. ■